BAB 6 BARISAN DAN DERET

6.1 Barisan Bilangan
6.2 Deret Tak Hingga
6.3 Deret Berganti Tanda
6.4 Konvergen Mutlak dan Bersyarat
6.5 Deret Kuasa
6.6 Deret Taylor dan Mac Laurin
6.7 Turunan dan Integral Deret Kuasa

6.1 Barisan Bilangan

Barisan bilangan tak hingga didefinisikan sebagai fungsi dengan domain merupakan bilangan bulat positif. Notasi yang biasa digunakan adalah:

$$a : n \rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, \ldots \quad , \quad n \in B^+.$$

$a_n \in \Re$ merupakan suku barisan ke-n dan tiga buah titik setelah suku kedua menunjukkan bahwa suku-suku barisan tersebut sampai tak hingga.

Contoh 6.1

1. $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots.$
2. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots.$
3. $\left\{(-1)^{n+1}(n+2)\right\}_{n=1}^{\infty} = 3, -4, 5, \ldots, (-1)^{n+1}(n+2), \ldots$

Barisan bilangan tak hingga $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ disebut barisan **konvergen** ke L $\in \Re$ bila $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, sedangkan bila limit tidak ada atau nilainya tak hingga maka barisan bilangan tak hingga $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ disebut barisan **divergen**.

Sifat limit barisan :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(Ca_n + Db_n\right) = C \lim\limits_{n\to\infty} a_n + D \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

3. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$

4. $\lim_{n\to\infty} {}^{a_n}\!\!\diagup b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \diagup \lim_{n\to\infty} b_n$; $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Contoh 6.2

Selidiki kekonvergenan barisan bilangan berikut

1. $\left\{\dfrac{n+1}{n-2}\right\}_{n=1}^{\infty}$
2. $\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}, \dfrac{27}{6}, \ldots$

Jawab :

1. Suku ke-n, $a_n = \dfrac{n+1}{n-2}$. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n-2} = 1$. Jadi barisan konvergen ke 1
2. $\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}, \dfrac{27}{6}, \ldots = \dfrac{3}{2}, \dfrac{3^2}{4}, \dfrac{3^3}{6}, \ldots, \dfrac{3^n}{2n}, \ldots$ Suku ke-n , $a_n = \dfrac{3^n}{2n}$. Digunakan dalil Delhopital, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n \ln 3}{2} = \infty$. Jadi barisan divergen.

Definisi : Barisan Monoton

Barisan bilangan tak hingga $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ disebut barisan :

(i) <u>**Monoton Naik**</u> bila $a_n \leq a_{n+1}$

(ii) <u>**Monoton Turun**</u> bila $a_n \geq a_{n+1}$

Soal Latihan 6.1

(Nomor 1 sd 10) Tentukan konvergensi barisan berikut !

1. $\left\{\dfrac{n}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$
2. $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$
3. $\left\{\dfrac{\pi^n}{4^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

4. $\left\{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$
5. $\left\{\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$
6. $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
7. $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{8},...$
8. $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},...$
9. $\left(1-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right),...$
10. $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right),\left(\sqrt{3}-\sqrt{4}\right),\left(\sqrt{4}-\sqrt{5}\right),...$

6.2 Deret Tak Hingga

Bentuk deret tak hingga dinyatakan dengan notasi sigma sebagai berikut :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_k + ...$$

a_k disebut suku-suku deret.

Jumlah Deret

Misal S_n menyatakan jumlah parsial n suku pertama deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Maka

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
....
....
....

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Barisan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ disebut **barisan jumlah parsial** deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Misal $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan jumlah parsial deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan barisan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke S. Maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dikatakan **deret konvergen** ke S dan S disebut jumlah dari deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, dinotasikan dengan : $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Sedangkan bila barisan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergen maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dikatakan **deret divergen** dan tidak ada jumlah.

Deret Geometri

Bentuk deret geometri yaitu : $\sum_{k=1}^{\infty} a\,r^{k-1} = a + a\,r + ... + a\,r^{k-1} + ...$ dengan a ≠ 0 dan r merupakan rasio. Pandang jumlah parsial n suku deret geometri berikut :

$$
\begin{aligned}
S_n &= a + a\,r + ... + a\,r^{n-1} \\
r\,S_n &= \qquad a\,r + ... + a\,r^{n-1} + a\,r^n \\
&\text{..} \; -
\end{aligned}
$$

$$S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}$$

Bila r =1 maka S_n tidak terdefinisi. Sedang untuk | r | > 1 maka $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$, sehingga $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ atau barisan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergen. Oleh karena itu, deret $\sum_{k=1}^{\infty} a\,r^{k-1}$ divergen.. Untuk | r | < 1 maka $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ sehingga $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$ atau barisan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke $\frac{a}{1-r}$ $(a \neq 0)$. Jadi deret $\sum_{k=1}^{\infty} a\,r^{k-1}$ konvergen ke $\frac{a}{1-r}$ $(a \neq 0)$ atau $\sum_{k=1}^{\infty} a\,r^{k-1} = \frac{a}{1-r}$ $(a \neq 0)$.

Deret Harmonis

Bentuk deret harmonis yaitu : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k} + ...$

Pandang jumlah parsial n suku pertama deret :

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + ... + \frac{1}{n} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + ... + \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Untuk n → ∞ maka (1+ ½ + ½ + … + 1/n) → ∞, sehingga $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Oleh karena itu, deret harmonis $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergen.

Tes Konvergensi

Misal $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ merupakan deret positif ($a_k \geq 0$). Maka $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ bila deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen . Hal ini menunjukkan bahwa bila $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen. Menggunakan implikasi di atas dapat diselidiki kekonvergenan suatu deret yang diberikan pada contoh berikut

Contoh 6.3

Selidiki kekonvergenan deret berikut :

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k-1}{k+1}$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k-1}{k^2+1}$

Jawab :

1. Suku ke-k, $a_k = \frac{2k-1}{k+1}$ dan $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{2k-1}{k+1} = 2$. Sebab nilai limit tidak sama dengan nol maka deret divergen.
2. Suku ke-k, $a_k = \frac{2k-1}{k^2+1}$ dan $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{2k-1}{k^2+1} = 0$. Sebab nilai limit sama dengan nol maka implikasi di atas tidak dapat digunakan untuk menentukan kekonvergenan deret.

Untuk mengetahui konvergenan suatu deret dilakukan tes konvergensi sebagai berikut :

1. Tes Integral

Misal $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ merupakan deret positif. Maka :

(i) Deret konvergen bila $\int_1^{\infty} a_k \ dk$ konvergen

(ii) Deret divergen bila $\int_1^{\infty} a_k \ dk$ divergen

Contoh 6.4

Selidiki kekonvergenan deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k^2}}$

Jawab :

$$\int_1^{\infty} a_k \ dk = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{k}{a^{k^2}} \ dk = \frac{-1}{2} \lim_{b\to\infty} e^{-k^2}\Big|_1^b = \frac{-1}{2} \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^{b^2}} - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e}$$

Karena integral tak wajar di atas konvergen ke $\frac{1}{2e}$ maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k^2}}$ konvergen ke $\frac{1}{2e}$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k^2}} = \frac{1}{2e}$.

2. Tes Deret-p

Bentuk deret-p atau deret hiperharmonis : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ dengan p > 0.

Menggunakan tes integral didapatkan :

$$\int_1^\infty \frac{1}{k^p}\,dk = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)$$

Bila p > 1 maka $\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{p-1}}=0$, sehingga $\int_1^\infty \frac{1}{k^p}\,dk = \frac{1}{p-1}$ (konvergen). Oleh karena itu, deret $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ untuk p > 1 konvergen ke $\frac{1}{p-1}$. Untuk 0 < p < 1 maka $\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{p-1}}=\infty$ sehingga $\int_1^\infty \frac{1}{k^p}\,dk$ divergen. Sedang untuk p = 1 didapatkan deret harmonis. Oleh karena itu, deret $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ untuk 0 < p ≤ 1 divergen.

3. Tes Perbandingan

Misal $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ merupakan deret positif dan berlaku $a_k \le b_k \quad ,\forall k$. Maka:

(i) Bila deret $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergen maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen

(ii) Bila deret $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergen maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen

Contoh 6.5

Tentukan konvergensi deret berikut

1. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-1}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^3+1}$

Jawab :

1. Pandang : $\frac{1}{k}<\frac{1}{k-1}$ dan karena deret harmonis $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergen maka deret $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-1}$ juga divergen.

2. Pandang : $\dfrac{k}{k^3+1} < \dfrac{1}{k^2}$ dan karena deret-p $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ konvergen maka deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{k^3+1}$ juga konvergen.

<u>4. Tes Ratio</u>

Misal $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ deret positif dan $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = r$. Maka :

(i) Bila r < 1 maka deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen

(ii) Bila r > 1 maka deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen

(iii) Bila r = 1 maka tes gagal melakukan kesimpulan (dilakukan dengan tes lain).

Contoh 6.6

Selidiki kekonvergenan deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k!}$

Jawab :

Misal $a_k = \dfrac{1}{k!}$. Maka $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{1}{k+1} = 0$. Jadi deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k!}$ konvergen

<u>5. Tes Akar</u>

Misal $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ deret positif dan $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} = a$. Maka :

(i) Bila a < 1 maka deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen

(ii) Bila a > 1 atau a = ∞ maka deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen

(iii) Bila a = 1 maka tes gagal melakukan kesimpulan (dilakukan dengan tes lain).

Contoh 6.7

Tentukan kekonvergenan deret $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k+2}{2k-1}\right)^k$

Jawab :

Misal $a_k = \left(\frac{3k+2}{2k-1}\right)^k$. Maka $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{3k+2}{2k-1} = \frac{3}{2}$. Jadi deret $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k+2}{2k-1}\right)^k$ konvergen.

6. Tes Limit Perbandingan

Misal $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ merupakan deret positif dan $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = l$. Maka kedua deret konvergen atau divergen secara bersama-sama bila l < ∞ dan l ≠ 0.

Contoh 6.8

Tentukan konvergensi deret $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}$

Jawab :

Pandang deret-p , $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergen. Misal $a_k = \frac{1}{k^2}$ dan $b_k = \frac{1}{k^2-1}$. Maka $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{k^2-1}{k^2} = 1$. Jadi deret $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}$ konvergen.

Soal Latihan 6.2

Tentukan konvergensi deret berikut

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k+5}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5k^2-k}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k-1}{3^k+2k}$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5\sin^2 k}{k!}$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^4 + k}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k - \frac{1}{4}}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{\sqrt{k} + 1}$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2 - k}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+8}}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{2 + \sin^2 k}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2 - 2k + 6}{8k^7 + k - 8}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3^k + 1}$

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)(k+5)}$

14. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8k^2 - 3k}}$

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)^{17}}$

16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 + 2k + 1}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k - 2}$

18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^3 + 1}$

19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3+k)^{2/5}}$

20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2+3^k\, k}$

22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k + k}{k!+3}$

6.3 Deret Berganti Tanda

Bentuk deret berganti tanda : $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\, a_k$ atau $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\, a_k$ dengan $a_k \geq 0$.

Pengujian konvergensi deret berganti tanda dilakukan dengan cara berikut :

Deret berganti tanda $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\, a_k$ atau $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\, a_k$ konvergen bila dipenuhi dua syarat :

(i) $a_k \geq a_{k+1}$
(ii) $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$

Bila paling sedikit salah satu syarat tidak dipenuhi maka deret dikatakan divergen.

Contoh 6.9

Tentukan konvergensi deret :

1. a. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+3}{k^2+k}$

Jawab :

1. Misal $a_k = \frac{1}{k}$. Maka $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k} > 1$. Oleh karena itu, $a_k \geq a_{k+1}$.

   Sedangkan $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. Jadi deret $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ konvergen.

2. Misal $a_k = \frac{k+3}{k^2+k}$. Maka

   $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \left(\frac{k+3}{k^2+k}\right)\left(\frac{(k+1)^2+(k+1)}{k+4}\right) = \frac{k^2+5k+6}{k^2+4k} = 1 + \frac{k+6}{k^2+4k} > 1$. Oleh karena itu, $a_k \geq a_{k+1}$. Sedangkan $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k+3}{k^2+k} = 0$. Jadi deret $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+3}{k^2+k}$ konvergen.

Soal Latihan 6.3

Tentukan konvergensi deret berikut

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{3^k}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+4}{k^2+k}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^k$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$
5. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-k}$

6.4 Konvergen Mutlak dan Bersyarat

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ disebut **konvergen mutlak** bila deret $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ konvergen. Bila deret konvergen mutlak maka konvergen. Sedang deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ disebut **konvergen bersyarat** bila deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konvergen tetapi deret $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ divergen.

Pengujian kekonvergenan (mutlak) deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ dilakukan dengan tes ratio.

Misal $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ dengan $u_k \neq 0$ dan $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = r$. Maka

(i) Bila r < 1 maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konvergen absolut

(ii) Bila r > 1 maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ divergen

(iii) Bila r = 1 maka tes gagal melakukan kesimpulan

Contoh 6.10

Selidiki deret berikut konvergen mutlak / bersyarat / divergen :

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{k}{5^k}\right)$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{k^2}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

Jawab :

1. Misal $u_k = (-1)^k \left(\frac{k}{5^k}\right)$. Maka $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{5^{k+1}}\frac{5^k}{k}\right| = \frac{1}{5}$. Jadi deret $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{k}{5^k}\right)$ konvergen mutlak.

2. Misal $u_k = \dfrac{(-4)^k}{k^2}$. Maka $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{(-4)^{k+1}}{(k+1)^2}\ \dfrac{k^2}{(-4)^k}\right| = 4$. Jadi deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-4)^k}{k^2}$ divergen.
3. Bila dilakukan pengujian di atas maka didapatkan r = 1 (gagal). Dari contoh sebelumnya, deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}$ konvergen tetapi deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^k}{k}\right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ divergen (deret harmonis). Jadi deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}$ konvergen bersyarat.

Soal Latihan 6.4

Selidiki kekonvergenan (mutlak, bersyarat dan divergen) deret berikut

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\ \dfrac{\ln k}{k}$
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\ \dfrac{2^k}{k!}$
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\ \dfrac{k^k}{k!}$
4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^{4/3}}$
5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\ \dfrac{k}{5^k}$
6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos k\pi}{k!}$

6.5 Deret Kuasa

Bentuk umum deret kuasa dalam (x - b) yaitu :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-b)^k = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + ... \qquad (*)$$

Sedang untuk b = 0 maka bentuk deret sebagai berikut :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... \qquad (**)$$

Deret kuasa bentuk (*) konvergen untuk x = b dan bentuk (**) konvergen untuk x = 0 (yaitu konvergen ke a_0). Pengujian apakah ada nilai x yang lain yang menyebabkan deret konvergen dilakukan sebagai berikut :

Misal diberikan deret $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-b)^k$ dan $\lim_{x\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}(x-b)^{k+1}}{a_k (x-b)^k} \right| = L$

Maka : (1) L < 1, deret $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-b)^k$ konvergen (mutlak)

(2) L > 1, deret $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-b)^k$ divergen.

Untuk L = 1 tidak dapat disimpulkan, pengujian konvergensi deret dilakukan dengan mensubstitusikan nilai x yang bersesuaian dengan L = 1 sehingga didapatkan bentuk deret bilangan. Pengujian konvergensi deret bilangan dilakukan dengan berbagai uji (Uji perbandingan, rasio, integral dll) baik deret positif maupun deret berganti tanda. Nilai x yang didapatkan dari pengujian di atas disebut **radius konvergensi** atau **selang konvergensi** deret.

Contoh 6.11

Tentukan selang konvergensi deret kuasa : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k x^k}{(k+1)}$

Jawab :

$$L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{3^{k+1} x^{k+1}}{(k+2)} \frac{(k+1)}{3^k x^k} \right| = |3x| \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k+2} = |3x|$$

Deret konvergen bila L < 1. Oleh karena itu, | 3 x | < 1 atau $\frac{-1}{3} < x < \frac{1}{3}$.

Bila x = - 1/3 maka didapatkan deret berganti tanda $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)}$ konvergen. (Tunjukkan : menggunakan tes deret berganti tanda). Sedang untuk x = 1/3 didapatkan deret $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)}$ divergen (Tunjukkan : menggunakan tes perbandingan). Jadi radius konvergensi deret kuasa adalah $\frac{-1}{3} \le x < \frac{1}{3}$.

Soal Latihan 6.5

(Nomor 1 sd 9) Tentukan semua nilai x yang menyebabkan deret konvergen.

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)\,2^k}$
2. $\sum k!\, x^k$
3. $\sum \frac{x^k}{k!}$
4. $\sum \frac{(-1)^k x^k}{3^k (k+1)}$
5. $\sum \frac{5^k}{k^2} x^k$
6. $\sum \frac{(-2)^k x^{k+1}}{k+1}$
7. $\sum \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$
8. $\sum (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
9. $\sum (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k\left(Ln\ k\right)^2}$

(Nomor 10 sd 18) Tentukan selang kekonvergenan dari deret:

10. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-2)^k}{k+1}$
11. $\sum \frac{(x-1)^k}{k}$
12. $\sum \frac{(x+2)^k}{k!}$
13. $\sum \frac{(x-5)^k}{k^2}$
14. $\sum (-1)^{k+1} \frac{(x+1)^k}{k}$
15. $\sum (-1)^k \frac{(x-4)^k}{(k+1)^2}$
16. $\sum \frac{(2k+1)!}{k^3} (x-2)^k$

17. $\sum \frac{(Ln\ k)(x-3)^k}{k}$

18. $\sum \frac{(2x-3)^k}{4^{2k}}$

6.6 Deret Taylor dan Mac Laurin

Misal f(x) dapat diturunkan sampai k kali pada x = b. Maka f(x) dapat diperderetkan menjadi menjadi deret kuasa dalam bentuk :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(a)}{2!}(x-b)^2 + ...$$

Deret di atas disebut **Deret Taylor** dengan pusat x = b atau disebut dengan **polinomial Taylor** pada x = b. Bila b = 0 maka disebut **Deret Mac Laurin**, yaitu berbentuk :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ...$$

Contoh 6.12

Perderetkan fungsi berikut ke dalam deret Mac Laurin

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = \frac{1}{1-x}$

Jawab :

1. Bila $f(x) = e^x$ maka $f^{(n)}(x) = e^x$ dan $f^{(n)}(0) = 1$. Oleh karena itu, deret Mac Laurin dari $f(x) = e^x$, yaitu : $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Dari perderetan tersebut terlihat bahwa deret konvergen untuk setiap nilai riil x atau selang / radius konvergensi deret adalah $\Re$.
2. Bila $f(x) = \frac{1}{1-x}$ maka $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^n}$ dan $f^{(n)}(x) = n!$. Oleh karena itu, deret Mac Laurin : $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Selang konvergensi deret yaitu | x | < 1 atau (-1,1).

Kedua bentuk deret di atas dapat digunakan untuk membantu memperderetkan fungsi ke dalam deret Mac Laurin atau Taylor tanpa harus menghitung turunannya terlebih dahulu, dengan syarat bahwa radius atau selang konvergensinya sebanding.

Contoh 6.13

Perderetkan fungsi berikut ke dalam deret taylor dengan pusat diberikan berikut

1. $f(x) = e^{3x}$; x = 0
2. $f(x) = \frac{1}{x}$; x = 1

Jawab :

1. Karena $f(x) = e^{3x}$ mempunyai turunan ke-n untuk setiap nilai riil x maka selang konvergensinya adalah $\Re$. Oleh karena itu, dengan membandingkan pola perderetan $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ maka didapatkan perderetan dari $f(x) = e^{3x}$ yaitu $e^{3x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!}$.
2. Karena $f(x) = \frac{1}{x}$ tidak diferensiabel di x = 0 dan fungsi akan diperderetkan ke dalam deret taylor dengan pusat di x = 1 maka tempat kedudukan titik-titik | x - 1 | < 1 merupakan selang konvergensinya. Oleh karena itu, perderetan fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ dalam deret taylor dengan pusat di x = 1 :
$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1 + (x-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k .$$

Soal Latihan 6.6

(Nomor 1 sd 10) Perderetkan fungsi berikut dalam deret Mac Laurin

1. $f(x) = e^{2x}$
2. $f(x) = \frac{1}{1+x}$
3. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
4. $f(x) = \frac{1}{2+x}$
5. $f(x) = \frac{1}{1+2x}$
6. $f(x) = \frac{x}{1+x}$
7. f(x) = sinh x
8. f(x) = sin x
9. f(x) = cos x
10. f(x) = sec x

(Nomor 11 sd 16) Carilah polinomial Taylor pada x = b, bila :

11. f(x) = Ln x ; b = 1
12. $f(x) = \frac{1}{x}$; $b = -1$
13. $f(x) = \frac{1}{x+2}$; $b = 3$
14. f(x) = cos x ; b = ½ π
15. f(x) = sinh x ; b = Ln 4
16. f(x) = sin πx ; b = ½

6.7 Turunan dan Integral Deret Kuasa

Misal deret $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-b)^k$ mempunyai radius konvergensi R dan $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-b)^k$. Maka :

(i) $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k\ a_k (x-b)^{k-1}$

(ii) $\int_C^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_C^x a_k\ (t-b)^k\ dt$

Contoh 6.14

Perderetkan dalam Mac Laurin fungsi

1. f(x) = $\tan^{-1}$x .
2. f(x) = ln (1 -x)
3. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

Jawab :

1. Pandang : $\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ dan $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^{2k}$

   Maka $\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$.

2. Pandang : $\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{dt}{1-t}$. Maka $\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$

3. Karena $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ merupakan hasil penurunan terhadap x dari $\dfrac{1}{1-x}$, maka

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty} k\ x^{k-1}$$

Soal Latihan 6.7

Tentukan perderetan mac Laurin dari :

1. f(x) = ln (1 + x)
2. $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$
3. f(x) = ln (1 + x^2)
4. $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^3}$
5. $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$
6. $f(x)=\int_0^x \ln(1+t)\ dt$
7. $f(x)=\int_0^x \tan^{-1} t\ dt$